Zadatak 101 (Marino, gimnazija)

Odredite skup svih vrijednosti parametra a za koje jednadžba $2-|x|=a\cdot x$ ima točno dva rješenja?

$A.\ \langle -\infty, -1\rangle$ $B.\ \langle -1, 1\rangle$ $C.\ \langle 1, +\infty\rangle$ $D.\ 0$ $E.\ [-1, 1\rangle$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}>0 \text{ i } a>0 \Rightarrow b>0 \quad , \quad \frac{a}{b}<0 \text{ i } a>0 \Rightarrow b<0.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A\cap B$.

Zbog definicije apsolutne vrijednosti promatramo dva slučaja.

Prvi slučaj

$x\ge 0 \Rightarrow |x|=x$

$$2-|x|=a\cdot x \Rightarrow 2-x=a\cdot x \Rightarrow a\cdot x=2-x \Rightarrow a\cdot x+x=2 \Rightarrow (a+1)\cdot x=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+1\ne 0 \\ a\ne -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (a+1)\cdot x=2 \ /\cdot\frac{1}{a+1} \Rightarrow x=\frac{2}{a+1}.$$

Budući da je $x \ge 0$, slijedi:

$$\frac{2}{a+1}\ge 0 \Rightarrow a+1>0 \Rightarrow a>-1 \Rightarrow a\in\langle -1, +\infty\rangle.$$

Drugi slučaj

$x<0 \Rightarrow |x|=-x$

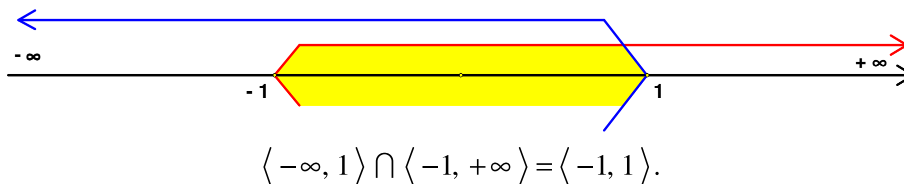
$$2-|x|=a\cdot x \Rightarrow 2-(-x)=a\cdot x \Rightarrow 2+x=a\cdot x \Rightarrow a\cdot x=2+x \Rightarrow a\cdot x-x=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)\cdot x=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a-1\ne 0 \\ a\ne 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (a-1)\cdot x=2 \ /\cdot\frac{1}{a-1} \Rightarrow x=\frac{2}{a-1}.$$

Budući da je $x < 0$, slijedi:

$$\frac{2}{a-1}<0 \Rightarrow a-1<0 \Rightarrow a<1 \Rightarrow a\in\langle -\infty, 1\rangle.$$

Traženo rješenje je presjek skupova $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle -1, +\infty\rangle$.



$$\langle -\infty, 1\rangle \cap \langle -1, +\infty\rangle = \langle -1, 1\rangle.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 101

Odredite skup svih vrijednosti parametra a za koje jednadžba $5-|x| = a\cdot x$ ima točno dva rješenja?

$A.\ \langle -\infty, -1\rangle \qquad B.\ \langle -1, 1\rangle \qquad C.\ \langle 1, +\infty\rangle \qquad D.\ 0 \qquad E.\ [-1, 1\rangle$

Rezultat: B.

Zadatak 102 (Fric, maturant)

Napišite koordinate nekih dviju točaka grafa funkcije $f(x) = |x+3| - 2$ koje imaju istu ordinatu.

Rješenje 102

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Jednadžba

$$|x| = a$$

- ima dva rješenja $x_1 = a$ i $x_2 = -a$ ako je $a > 0$
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$
- nema rješenja ako je $a < 0$.

Pretpostavimo da je $|x+3|$ bilo koji pozitivan realan broj. Taj se broj može realizirati za $x_1, x_2 \in R$. Tada računamo $f(x) = |x+3| - 2.$ Na primjer,

- $|x+3| = 7 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3=-7 \\ x+3=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-7-3 \\ x=7-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-10 \\ x_2=4 \end{matrix}\right\}.$

Sada je

$$f(x) = |x+3| - 2 \Rightarrow f(x) = 7-2 \Rightarrow f(x) = 5.$$

Točke su:

$$(-10, 5) \text{ i } (4, 5).$$

- $|x+3| = \frac{5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3=-\frac{5}{2} \\ x+3=\frac{5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{2}-3 \\ x=\frac{5}{2}-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{2}-\frac{3}{1} \\ x=\frac{5}{2}-\frac{3}{1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{-5-6}{2} \\ x=\frac{5-6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = -\frac{11}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\}.$$

Sada je

$$f(x) = |x+3| - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} - \frac{2}{1} \Rightarrow f(x) = \frac{5-4}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Točke su:

$$\left(-\frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ i } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Vježba 102

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 103 (Tonka, maturantica)

Kojoj je od navedenih nejednadžba rješenje interval $\langle -9, 3 \rangle$?

$A. \ |x-6| < 3 \qquad B. \ |x-3| < 6 \qquad C. \ |x+6| < 3 \qquad D. \ |x+3| < 6$

Rješenje 103

Ponovimo!

$$a < b < c \ , \ r \in R \Rightarrow a + r < b + r < c + r.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow -a < x < a.$$

1.inačica

$$-9 < x < 3 \Rightarrow -9 < x < 3 \ /+3 \Rightarrow -9+3 < x+3 < 3+3 \Rightarrow -6 < x+3 < 6 \Rightarrow |x+3| < 6.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Riješimo svaku nejednadžbu.

$$\left. \begin{matrix} |x-6| < 3 \\ |x-3| < 6 \\ |x+6| < 3 \\ |x+3| < 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -3 < x-6 < 3 \\ -6 < x-3 < 6 \\ -3 < x+6 < 3 \\ -6 < x+3 < 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -3 < x-6 < 3 \ /+6 \\ -6 < x-3 < 6 \ /+3 \\ -3 < x+6 < 3 \ /-6 \\ -6 < x+3 < 6 \ /-3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} -3+6 < x-6+6 < 3+6 \\ -6+3 < x-3+3 < 6+3 \\ -3-6 < x+6-6 < 3-6 \\ -6-3 < x+3-3 < 6-3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} -3+6 < x-6+6 < 3+6 \\ -6+3 < x-3+3 < 6+3 \\ -3-6 < x+6-6 < 3-6 \\ -6-3 < x+3-3 < 6-3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3 < x < 9 \\ -3 < x < 9 \\ -9 < x < -3 \\ -9 < x < 3 \text{ rješenje} \end{matrix} \right\}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 103

Kojoj je od navedenih nejednadžba rješenje interval $\langle -8, 2 \rangle$?

$A. \ |x-2|<5 \qquad B. \ |x-5|<2 \qquad C. \ |x+3|<5 \qquad D. \ |x+5|<3$

Rezultat: C.

Zadatak 104 (Ajax, maturant)

Za koliko cijelih brojeva a vrijedi $9 \le |a| \le 11$?

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a \le b \ , \ c<0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \ge b \cdot c.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \le a \ , \ a>0 \ \Rightarrow \ -a \le x \le a.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Prvi slučaj

$$9 \le |a| \le 11 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a \ge 0 \\ |a| = a \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 9 \le a \le 11 \ \Rightarrow \ a \in \{9, 10, 11\}, \text{ tri cijela broja.}$$

Drugi slučaj

$$9 \le |a| \le 11 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a<0 \\ |a| = -a \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 9 \le -a \le 11 \ \Rightarrow \ 9 \le -a \le 11 \ / \cdot (-1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -9 \ge a \ge -11 \ \Rightarrow \ -11 \le a \le -9 \ \Rightarrow \ a \in \{-11, -10, -9\}, \text{ tri cijela broja.}$$

Ukupno je 6 cijelih brojeva.

Vježba 104

Za koliko cijelih brojeva a vrijedi $8 \le |a| \le 12$?

Rezultat: 10.

Zadatak 105 (Miroslav, gimnazija)

Pojednostavnite izraz $\sqrt{a+1+2 \cdot \sqrt{a}} + \sqrt{a+1-2 \cdot \sqrt{a}} \quad (a \ge 1)$.

Rješenje 105

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

$$\sqrt{a+1+2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{a+1-2\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{a+2\cdot\sqrt{a}+1}+\sqrt{a-2\cdot\sqrt{a}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2+2\cdot\sqrt{a}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\cdot\sqrt{a}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)^2}=\left|\sqrt{a}+1\right|+\left|\sqrt{a}-1\right|=$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{a}+1>0\\ \sqrt{a}-1\geq 0\end{bmatrix}=\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1=\sqrt{a}+1+\sqrt{a}-1=2\cdot\sqrt{a}.$$

Vježba 105

Pojednostavnite izraz $\sqrt{a+1+2\cdot\sqrt{a}}-\sqrt{a+1-2\cdot\sqrt{a}}\quad (a\geq 1)$.

Rezultat: 2.

Zadatak 106 (Andrija, maturant)

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\,|2\cdot x-3|-m\,\right|=m$ ako je parametar $m > 0$?

A. točno jedno *B.* točno dva *C.* točno tri *D.* točno četiri

Rješenje 106

Ponovimo!

Parametar
Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x|=a\ ,\ a>0\ \Rightarrow \left.\begin{matrix}x=-a\\ x=a\end{matrix}\right\}\quad ,\quad |x|=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

$$\left|\,|2\cdot x-3|-m\,\right|=m\ \Rightarrow \left.\begin{matrix}|2\cdot x-3|-m=-m\\ |2\cdot x-3|-m=m\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}|2\cdot x-3|-m=-m\\ |2\cdot x-3|=m+m\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}|2\cdot x-3|=0\\ |2\cdot x-3|=2\cdot m\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot x-3=0\\ 2\cdot x-3=-2\cdot m\\ 2\cdot x-3=2\cdot m\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}2\cdot x=3\\ 2\cdot x=-2\cdot m+3\\ 2\cdot x=2\cdot m+3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=3\ /:2 \\ 2\cdot x=-2\cdot m+3\ /:2 \\ 2\cdot x=2\cdot m+3\ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{-2\cdot m+3}{2} \\ x_3=\frac{2\cdot m+3}{2} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 106

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\left|2\cdot x-3\right|-m\right|=0$ ako je parametar m > 0?

A. točno jedno *B.* točno dva *C.* točno tri *D.* točno četiri

Rezultat: B.

Zadatak 107 (Strukovnjaci, maturanti)

Koliko je $\left|3-\left|a-2\right|\right|$ za $a=1-\sqrt{2}$?

$A.\ 2-\sqrt{2}$ $B.\ 5-\sqrt{2}$ $C.\ 1+\sqrt{2}$ $D.\ 6+\sqrt{2}$

Rješenje 107

Ponovimo!

$$\sqrt{2}=1.414213562....$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left|3-\left|a-2\right|\right|=\left[a=1-\sqrt{2}\right]=\left|3-\left|1-\sqrt{2}-2\right|\right|=\left|3-\left|-1-\sqrt{2}\right|\right|=\left|3-\left|\underbrace{-1-\sqrt{2}}_{<0}\right|\right|=$$

$$=\left|3-\left(-\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)\right|=\left|3-\left(1+\sqrt{2}\right)\right|=\left|3-1-\sqrt{2}\right|=\left|2-\sqrt{2}\right|=\left|\underbrace{2-\sqrt{2}}_{>0}\right|=2-\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 107

Koliko je $\left|3-\left|a-2\right|\right|$ za $a=\sqrt{2}$?

$A.\ 2-\sqrt{2}$ $B.\ 5-\sqrt{2}$ $C.\ 1+\sqrt{2}$ $D.\ 6+\sqrt{2}$

Rezultat: C.

Zadatak 108 (Mario, maturant)

Napišite točnu vrijednost broja $\left|\left|1-\pi\right|-3\right|$ bez znaka apsolutne vrijednosti. U odgovoru se koristite oznakom π, a ne decimalnim zapisom broja π.

Rješenje 108

Ponovimo!

$$\pi \approx 3.141592654....$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\left| |1-\pi| - 3 \right| = \left| \left| \underbrace{1-\pi}_{<0} \right| - 3 \right| = \left| -(1-\pi) - 3 \right| = \left| -1 + \pi - 3 \right| = \left| \pi - 4 \right| = \left| \underbrace{\pi - 4}_{<0} \right| =$$

$$= -(\pi - 4) = -\pi + 4 = 4 - \pi.$$

Vježba 108

Napišite točnu vrijednost broja $\left| |1-\pi| - 2 \right|$ bez znaka apsolutne vrijednosti. U odgovoru se koristite oznakom π, a ne decimalnim zapisom broja π.

Rezultat: $\pi - 3.$

Zadatak 109 (Jelena, maturantica)

Koliko rješenja u skupu Z ima jednadžba $\frac{|x+2|}{x+2} + \frac{x-2}{|x-2|} = 0$?

A. 1 *B.* 2 *C.* 0 *D.* 3

Rješenje 109

Ponovimo!

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \text{ ili } Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Za navedene module odredimo karakteristične točke.

$$|x+2| \qquad |x-2|$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \qquad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

Promatramo tri slučaja

Prvi slučaj

$$x<-2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2<0 \\ x-2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x+2|=-(x+2)=-x-2 \\ |x-2|=-(x-2)=-x+2 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba glasi:

$$\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{x-2}{|x-2|}=0 \Rightarrow \frac{-x-2}{x+2}+\frac{x-2}{-x+2}=0 \Rightarrow \frac{-(x+2)}{x+2}-\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-(x+2)}{x+2}-\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow -1-1=0 \Rightarrow -2 \neq 0.$$

Nema rješenja!

Drugi slučaj

$$-2<x<2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ x-2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x+2|=x+2 \\ |x-2|=-(x-2)=-x+2 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba glasi:

$$\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{x-2}{|x-2|}=0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+2}+\frac{x-2}{-x+2}=0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+2}-\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x+2}-\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow 1-1=0 \Rightarrow 0=0.$$

Rješenja su

$$x \in \langle -2,\ 2 \rangle.$$

Treći slučaj

$$x>2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2>0 \\ x-2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x+2|=x+2 \\ |x-2|=x-2 \end{array}\right\}.$$

Jednadžba glasi:

$$\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{x-2}{|x-2|}=0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+2}+\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+2}+\frac{x-2}{x-2}=0 \Rightarrow 1+1=0 \Rightarrow 2 \neq 0.$$

Nema rješenja!

U drugom slučaju za $x \in \langle -2,\ 2 \rangle$ cijeli brojevi su: – 1, 0, 1. Dakle, postoje tri cjelobrojna rješenja.

Odgovor je pod D.

Vježba 109

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 110 (Sara, gimnazija)

Riješite jednadžbu $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1.$

Rješenje 110

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A \cup B$.

Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

Izraze pod znakom modula izjednačimo s nulom kako bismo odredili karakteristične točke.

$$2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right| = 2^{x+1} + 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 2^{x+1} - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ 2^{x+1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ 2^{x+1} = 2^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \end{array}\right\}.$$

Karakteristične točke su $x = -2$, $x = -1$ i one interval $\langle -\infty, +\infty \rangle$ dijele na tri podintervala:

$$\langle -\infty, -2 \rangle \;,\; [-2, -1 \rangle \;,\; [-1, +\infty \rangle.$$

Prvi slučaj

Za $x \in \langle -\infty, -2 \rangle$ je:

- $x + 2 < 0 \Rightarrow |x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$
- $2^{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \left|2^{x+1} - 1\right| = -\left(2^{x+1} - 1\right) = -2^{x+1} + 1.$

Jednadžba glasi:

$$2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right| = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow 2^{-x-2} - \left(-2^{x+1} + 1\right) = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-x-2} + 2^{x+1} - 1 = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow 2^{-x-2} + 2^{x+1} - 1 = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow 2^{-x-2} - 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-x-2} = 1 + 1 \Rightarrow 2^{-x-2} = 2 \Rightarrow 2^{-x-2} = 2^1 \Rightarrow -x - 2 = 1 \Rightarrow -x = 1 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = 3 \Rightarrow -x = 3 \;/\cdot (-1) \Rightarrow x = -3.$$

To je rješenje jer je

$$-3 \in \langle -\infty, -2 \rangle.$$

Drugi slučaj

Za $x \in [-2, -1 \rangle$ je:

- $x + 2 > 0 \Rightarrow |x + 2| = x + 2$
- $2^{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \left|2^{x+1} - 1\right| = -\left(2^{x+1} - 1\right) = -2^{x+1} + 1.$

Jednadžba glasi:

$$2^{|x+2|} - \left|2^{x+1} - 1\right| = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow 2^{x+2} - \left(-2^{x+1} + 1\right) = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1\ \Rightarrow\ 2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1\ \Rightarrow\ 2^{x+2}-1=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{x+2}=1+1\ \Rightarrow\ 2^{x+2}=2\ \Rightarrow\ 2^{x+2}=2^{1}\ \Rightarrow\ x+2=1\ \Rightarrow\ x=1-2\ \Rightarrow\ x=-1.$$

To nije rješenje jer

$$-1\notin\left[-2,\,-1\right\rangle.$$

Treći slučaj

Za $x\in\left[-1,\,+\infty\right\rangle$ je:

- $x+2>0\ \Rightarrow\ \left|x+2\right|=x+2$
- $2^{x+1}-1>0\ \Rightarrow\ \left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}-1.$

Jednadžba glasi:

$$2^{\left|x+2\right|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1\ \Rightarrow\ 2^{x+2}-\left(2^{x+1}-1\right)=2^{x+1}+1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1\ \Rightarrow\ 2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{x+2}-2^{x+1}=2^{x+1}\ \Rightarrow\ 2^{x+2}=2^{x+1}+2^{x+1}\ \Rightarrow\ 2^{x+2}=2\cdot 2^{x+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{x+2}=2^{1}\cdot 2^{x+1}\ \Rightarrow\ 2^{x+2}=2^{x+2}\ \Rightarrow\ x+2=x+2.$$

Rezultat ima smisla za svaki $x\in\left[-1,\,+\infty\right\rangle$.

Zadan jednadžba ima rješenja

$$x\in\left\{-3\right\}\cup\left[-1,\,+\infty\right\rangle.$$

Vježba 110

Odmor!

Rezultat: …